Faktoryzacja Choleskiego

Cel: rozkład macierzy symetrycznej i dodatnio określonej (SDO) do postaci iloczynu macierzy trójkątnej i do niej transponowanej.

Def: Macierz A jest SPO $\iff \forall_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \; x^T A x > 0$ ($x^* A x > 0$ gdy $x \in C^n$, $x^* = (\bar{x})^T$).

Przykłady

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $x^T A x = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 =$
$= 2(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2$

Zatem dla $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ $x^T A x > 0 \Rightarrow A$ is SDO

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $x^T A x = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = 2(x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2$
wielkość ta jest ujemna dla $x_1 = 2$ i $x_2 = -1$.

Zatem A nie jest SDO!

Wybrane własności macierzy SDO

1) A jest SDO $\iff$ wszystkie wartości własne A są dodatnie (są liczbami rzeczywistymi, co wynika z samej symetrii)

2) Jeżeli A jest SDO, a macierz B o wymiarach $n \times m$ ($n \geq m$) ma pełny rząd, to macierz $B^T A B$ (o wymiarze $m \times m$) jest również SDO

3)
$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \overset{j}{\vdots} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A_j – podmacierz (główna) $j \times j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$)
Macierz A jest SDO $\iff$ wszystkie wyznaczniki $\det A_j > 0$, $j = 1, 2, .., n$

Faktoryzacja macierzy SDO

Niech
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a>0, \quad ac-b^2>0$$

Połóżmy...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ u & v \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{a} & u \\ 0 & v \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} a & u\sqrt{a} \\ u\sqrt{a} & u^2+v^2 \end{bmatrix}$$

Równość ma miejsce, gdy: $b = u\sqrt{a} \Rightarrow u = \frac{b}{\sqrt{a}}$

i $c = u^2+v^2 \Rightarrow v^2 = c-u^2 = c-\frac{b^2}{a}$

Ale $ac-b^2>0 \Rightarrow c > \frac{b^2}{a}$ zatem $v^2>0 \Rightarrow v$ – rzeczywista!

$$v = \sqrt{c-\frac{b^2}{a}}$$

TW (Choleski): Jeżeli macierz kwadratowa A jest SDO to istnieje macierz dolna trójkątna L taka, że
$$A = LL^T$$

Dowód:

Zastosujemy metodę indukcji. Pokazaliśmy powyżej, że rozkład ma miejsce dla macierzy o wymiarze $n_0=2$. Pokażemy, że z założenia iż rozkład Choleskiego istnieje dla każdej macierzy SDO o wymiarze $n-1$ wynika istnienie takiego rozkładu dla dowolnej macierzy SDO o wymiarze n.

Niech macierz A będzie dowolną macierzą SDO o wymiarze n. Możemy ją przedstawić w postaci blokowej

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array}\right], \text{ gdzie } a>0, \text{ i } C \text{ jest } (n-1)\times(n-1).$$

Połóżmy $u = \frac{1}{\sqrt{a}} b$ i $A_1 = C - \underbrace{uu^T}$

diada! $(uu^T)_{ij} = u_i u_j$

$i, j = 1, 2, .., n-1.$

Definiujemy macierz o wymiarze n:

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0^T \\ \hline u & I \end{array}\right]$$

I - macierz jednostkowa o wymiarze $n-1$

Obliczmy iloczyn ...

$$S \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] S^T = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0^T \\ \hline u & I \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & I \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a & \sqrt{a}\, u^T \\ \hline \sqrt{a}\, u & uu^T + A_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array}\right] = A$$

Macierz S jest ewidentnie nieosobliwa (jej wyznacznik jest równy $\sqrt{a} \neq 0$), podobnie macierz S^T. Zatem

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] = S^{-1} A S^{-T}$$

Z własności 2 (vide str. 1) wynika, że macierz po lewej stronie otrzymanej równości jest SDO. Skoro tak, to jest taką również macierz A_1. Istotnie, zbiór wartości własnych macierzy po lewej stronie równości składa się z jedynki i wszystkich wartości własnych (pod)macierzy A_1, zatem wszystkie wartości własne tej ostatniej są dodatnie.

Zgodnie z założeniem indukcyjnym macierz A_1 ma zatem rozkład Choleskiego, tj. istnieje taka macierz dolna trójkątna (o wymiarze $n-1$) V, że:

$$A_1 = VV^T$$

Zdefiniujmy teraz

$$L = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0^T \\ \hline u & V \end{array}\right]$$

Mamy wówczas

$$LL^T = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0^T \\ \hline u & V \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & V^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & \sqrt{a}\,u^T \\ \hline \sqrt{a}\,u & uu^T + \underbrace{VV^T}_{A_1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array}\right] = A$$

co dowodzi istnienia rozkładu dla (dowolnej) macierzy o wymiarze n. Na mocy zasady indukcji wnioskujemy o prawdziwości twierdzenia Choleskiego.

Pseudokod algorytmu faktoryzacji Choleskiego

```
L = A
for k = 1:n do
    for j = k+1:n do
        L(j:n, j) = L(j:n, j) - [L(j,k)/L(k,k)] · L(j:n, k)
    end;
    L(k:n, k) = L(k:n, k)/√L(k,k)
end;
```